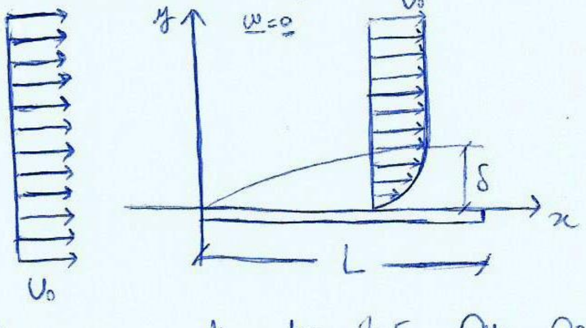
Lo strato limite (piano)

Si indica con il nome di strato limite lo strato entro cui gli effetti viscosi hanno la stessa importanza di quelli inerziali qualsiasi sia il numero di Reynolds che caratterizza il moto.
Porre $\nu=0$ è infatti un'ipotesi molto semplificativa e non è valida almeno nelle immediate vicinanze dei corpi immersi nei fluidi (ovvero nello strato limite, dove è presente vorticità). La condizione di aderenza del fluido alla parete deve essere soddisfatta anche per piccoli valori di ν, nonostante avere $\nu \to 0$ per Re tendente a infinito.
La presenza dello strato limite consente inoltre di superare il paradosso di d'Alembert secondo cui la resistenza esercitata da un fluido su un corpo in moto sarebbe nulla.

Un primo problema è quello di definire lo spessore dello strato limite. Ci accontentiamo di trovarne l'ordine di grandezza considerando una lastra piana investita da un flusso a velocità U_0:



$\sigma(U)=U_0 \quad \sigma(x)=L \quad \sigma(y)=\delta$

Con $\delta << L$ (nell'immagine δ è molto più grande di quanto sia in realtà per esigenze didattiche).
La scala temporale è L/U_0

Dall'equazione di continuità $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$ ricaviamo l'ordine di grandezza di v:

$$\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=U_0/L \;,\quad \sigma\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)=U_0/\delta \quad \Rightarrow \quad \sigma(v)=\frac{\delta}{L}\cdot U_0$$

La componente verticale della velocità è più piccola di quella orizzontale. Notando inoltre che $\sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{U_0}{L^2} << \frac{U_0}{\delta^2}=\sigma\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$, possiamo identificare gli ordini di grandezza di tutti i termini delle equazioni di Navier-Stokes (stazionarie, $\frac{\partial}{\partial t}=0$, e piane):

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$U_0\cdot\frac{U_0}{L} \quad \frac{\delta U_0}{L}\cdot\frac{U_0}{\delta} \quad \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\rho U_0^2}{L} \quad \frac{\nu U_0}{L^2} \quad \frac{\nu U_0}{\delta^2}$$

Possiamo trascurare il termine con ordine $\frac{\nu U_0}{L^2}$. Devono inoltre essere confrontabili:

$$\frac{U_0^2}{L}\sim\nu\frac{U_0}{\delta^2} \Rightarrow \frac{\delta^2}{L^2}\sim\frac{\nu}{U_0 L} \Rightarrow \frac{\delta}{L}\sim\sqrt{\frac{1}{Re}}$$

Se $Re=10^6$ lo strato limite ha spessore di circa 0,1 mm per metro di lunghezza

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$U_0\frac{\delta}{L}\cdot\frac{U_0}{L} \quad \frac{U_0\delta}{L}\cdot\frac{U_0\delta}{\delta L} \quad \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\rho U_0^2}{\delta} \quad \nu\frac{\delta U_0}{L^3} \quad \nu\frac{\delta U_0}{L\delta^2}$$

Possiamo trascurare, essendo $\frac{\delta U_0}{L^3} << \frac{\delta U_0^2}{L^2} << \frac{U_0^2}{\delta}$, i termini con $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$. Confrontando gli ordini dei termini rimanenti:

$$\frac{U_0^2}{\delta} >> \frac{\nu U_0}{\delta L} \Rightarrow \frac{L U_0}{\nu} >> 1$$

Le equazioni semplificate dello strato limite sono allora:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \\ u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p_m}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p_m}{\partial y}=0 \end{cases}$$

Con $p_m=p+\rho g z$, pressione modificata che non varia apprezzabilmente in direzione verticale. Le condizioni al contorno sono:
$u=v=0$ per $y=0$, $u\to U$ per $\frac{y}{\delta_0}\to\infty$
$0\le x\le L$

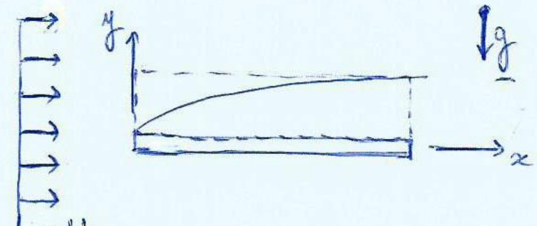
Soluzione dello strato limite mediante il principio della quantità di moto

Recuperiamo il principio delle quantità di moto in forma integrale:

$$\underline{I} + \underline{M_u} - \underline{M_i} = \underline{\Pi} + \underline{G}$$

$$\underline{I} = \int_V \frac{\partial \rho \underline{v}}{\partial t}\, dV \qquad \underline{M} = \underline{M_u} - \underline{M_i} = \int_S \rho \underline{v}(\underline{v}\cdot\underline{n})\, dS \qquad \underline{\Pi} = \int_S \underline{t}\, dS \qquad \underline{G} = \int_V \rho \underline{f}\, dV$$

Definiamo un volume di controllo e applichiamo il principio nella direzione x



$$\underbrace{\cancel{I_x}}_{=0} + M_{ux} - M_{ix} = \Pi_x + \underbrace{\cancel{G_x}}_{=0}$$

poiché $\underline{f} = \underline{g}$ è verticale

Flusso di quantità di moto entrante:

$$M_{ix} = \int_0^\delta \rho U_0^2\, dy$$

Flusso di quantità di moto uscente:

$$M_{ux} = \int_0^\delta \rho U^2(y)\cdot dy + \int_0^\delta \rho (U_0 - U(y))\cdot U_0\, dy$$

Risultante delle forze di superficie:

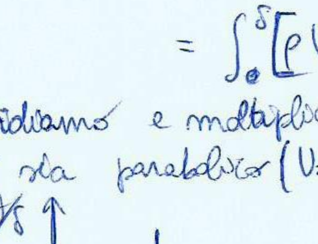
$$\Pi_x = \int_0^\delta p_0\, dy - \int_0^\delta p_0\, dy - \int_0^x \tau\, dx$$

Quindi:

$$-\int_0^\delta \tau\, dx = -\int_0^\delta \rho U_0^2\, dy + \int_0^\delta \rho U^2(y)\, dy + \int_0^\delta \rho (U_0 - U(y)) U_0\, dy =$$

$$= \int_0^\delta \left[\rho U^2(y) - \rho\, \rho U(y)\cdot U_0\right] dy = \rho U_0^2 \int_0^\delta \left[\left(\frac{U(y)}{U_0}\right)^2 - \frac{U(y)}{U_0}\right] dy$$

Dividiamo e moltiplichiamo per δ, poi supponiamo che il profilo di velocità sia parabolico ($U = U(y)$):



$$-\int_0^x \tau\, dx = \rho U_0^2 \delta \cdot \int_0^1 \left[\left(\frac{U}{U_0}\right)^2 - \frac{U}{U_0}\right] d\eta \quad \text{con } d\eta = d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

$$\frac{U}{U_0} = a\eta^2 + b\eta \Rightarrow \frac{d(U/U_0)}{d\eta} = 2a\eta + b$$

$$\begin{cases} \frac{U}{U_0}(1) = a + b = 1 \\ \frac{d(U/U_0)}{d\eta}(1) = 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b + 1 \\ -2b + 2 + b = 0 \Rightarrow b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{U}{U_0} = -\eta^2 + 2\eta$$

Risolviamo quindi l'equazione integrale:

$$-\int_0^x \tau\, dx = \rho U_0^2 \delta \cdot \int_0^1 (\eta^4 - 4\eta^3 + 4\eta^2 + \eta^2 - 2\eta)\, d\eta = \rho U_0^2 \delta \left(\frac{\eta^5}{5} - \cancel{4}\frac{\eta^4}{\cancel{4}} + 5\frac{\eta^3}{3} - \cancel{2}\frac{\eta^2}{\cancel{2}}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \rho U_0^2 \delta \left(\frac{1}{5} - 1 + \frac{5}{3} - 1\right) = \frac{3 - 15 + 25 - 15}{15} = -\frac{2}{15}\rho U_0^2 \delta$$

$$\Rightarrow \int_0^x \tau\, dx = \frac{2}{15}\rho U_0^2 \delta, \text{ derivando } \Rightarrow \tau(x) = \frac{2}{15}\rho U_0^2 \frac{d\delta}{dx}$$

Calcoliamo ora:

$$\tau_0 = \frac{\mu U_0}{\delta} \cdot \frac{\partial(U/U_0)}{\partial(y/\delta)}\Big|_{y=0} = 2\frac{\mu U_0}{\delta} \Rightarrow 2\frac{\mu \cancel{U_0}}{\delta} = \frac{2}{15}\cdot \rho U_0^{\cancel{2}} \frac{d\delta}{dx} \Rightarrow \frac{\nu}{U_0}\, 15\, dx = \delta \cdot d\delta$$

$$\Rightarrow 30\frac{\nu}{U_0} x = \delta^2 \Rightarrow \left(\frac{\delta}{x}\right)^2 = \frac{30}{\left(\frac{U_0 x}{\nu}\right)} \Rightarrow \frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{30\nu}{U_0 x}} \simeq \frac{5{,}48}{\sqrt{Re_x}}$$

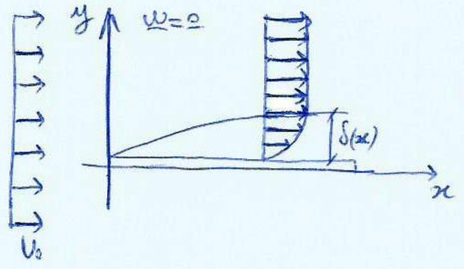
Possiamo ricavare tensione tangenziale e forza esercitata dal fluido sulla piastra:

$$\tau(x) = \frac{\cancel{2}}{15}\rho U_0^2 \cdot \sqrt{\frac{30\nu}{U_0}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} = \frac{0{,}365\, \rho U_0^2}{\sqrt{Re_x}} \Rightarrow F_x = \int_0^L \tau(x)\, dx = \frac{2}{15}\rho U_0^2 \cdot \sqrt{\frac{30\nu L}{U_0}}$$

Risulta superato il paradosso di d'Alembert per moto irrotazionale stazionario e uniforme

La soluzione di Blasius

Torniamo ancora alla lastra piana e alle equazioni semplificate dello strato limite:



$$\frac{U_0 L}{\nu} >> 1 \qquad \frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}} << 1$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

Vorremmo passare da derivate parziali a derivate ordinarie per semplificare la risoluzione del problema. Essendo $O(\delta) = x \cdot \sqrt{Re_x}$ adimensionalizziamo y:

$$\eta = \frac{y}{\delta} = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}} = \frac{y\sqrt{U_0}}{\sqrt{\nu x}}$$

Recuperiamo inoltre la funzione di corrente ψ che soddisfa automaticamente l'equazione di continuità (stiamo trattando un moto a potenziale):

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Poniamo $\psi = U_0 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} \cdot f(\eta) = \sqrt{U_0 \nu x}\cdot f(\eta)$ e ricaviamo:

$$u = \sqrt{\nu x U_0}\cdot f'(\eta)\cdot\frac{\sqrt{U_0}}{\sqrt{\nu x}} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = U_0 \cdot f''(\eta)\cdot\frac{y\sqrt{U_0}}{\sqrt{\nu}}\cdot\left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right),\ \frac{\partial u}{\partial y} = U_0 f''(\eta)\cdot\frac{\sqrt{U_0}}{\sqrt{\nu x}}$$

$$v = -\sqrt{U_0 \nu}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}} f(\eta) + f'(\eta)\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{y\sqrt{U_0}}{\sqrt{\nu}}\cdot\left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)\right]$$

Sostituiamo ora nell'equazione del moto (trascurando la pressione):

$$-U_0 f'(\eta)\cdot U_0 f''(\eta)\,\frac{y\sqrt{U_0}}{\sqrt{\nu}}\cdot\frac{1}{2x\sqrt{x}} - \sqrt{U_0\nu}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}} f(\eta) - f'(\eta)\frac{1}{2x}\cdot\frac{y\sqrt{U_0}}{\sqrt{\nu}}\right]\cdot U_0 f''(\eta)\frac{\sqrt{U_0}}{\sqrt{\nu x}} = \frac{U_0^2}{x}\cdot f'''(\eta)$$

$$\Rightarrow \cancel{-U_0^2\sqrt{\frac{U_0}{\nu}}\cdot\frac{1}{2x\sqrt{x}} f'(\eta)\cdot f''(\eta)} - \frac{U_0^2}{2x} f(\eta)\cdot f''(\eta) + \cancel{\frac{U_0^2\sqrt{U_0}}{\sqrt{\nu}}\cdot\frac{1}{2x\sqrt{x}} f'(\eta)\cdot f''(\eta)} = \frac{U_0^2}{x} f'''(\eta)$$

$$\Rightarrow -\frac{U_0^2}{2x} f(\eta)\cdot f''(\eta) = \frac{U_0^2}{x} f'''(\eta) \Rightarrow f'''(\eta) + \frac{f(\eta)}{2}\cdot f''(\eta) = 0$$

Le derivate ora sono totali, $\frac{d^3 f}{d\eta^3} + \frac{f}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2} = 0$, non più parziali. Abbiamo ottenuto l'equazione di Blasius, con dominio monodimensionale, più facile da esprimere numericamente (o, come fece Blasius, con gli sviluppi in serie), rispetto a quello bidimensionale di partenza. Rimane la non linearità del problema.

Le condizioni al contorno sono:

$$f(\eta=0) = 0 \qquad f'(\eta=0) = 0 \qquad \lim_{\eta\to\infty} f'(\eta) = 1$$

Allontanandosi dalla piastra la velocità deve tendere a U_0 (adimensionalmente tende a 1).

Tensione tangenziale e resistenza al moto sono:

$$\tau|_{y=0} = \mu\frac{\partial u}{\partial y} = \mu\frac{U_0\sqrt{U_0}}{\sqrt{\nu x}}\cdot f''(0) = 0{,}33\cdot\frac{\rho U_0^2}{\sqrt{Re_x}}$$

$$F_x = \int_S \tau\, dS = \int_0^L \tau\, dx = \int_0^L \sqrt{\frac{\nu}{U_0 x}}\cdot 0{,}33\cdot\rho U_0^2\, dx = 0{,}66\cdot\sqrt{\frac{\nu L}{U_0}}\cdot\rho U_0^2 = \frac{0{,}66}{\sqrt{Re_L}}\rho L U_0^2$$

Si può infine ottenere numericamente l'espressione analitica di δ:

$$\delta = 4.9\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$